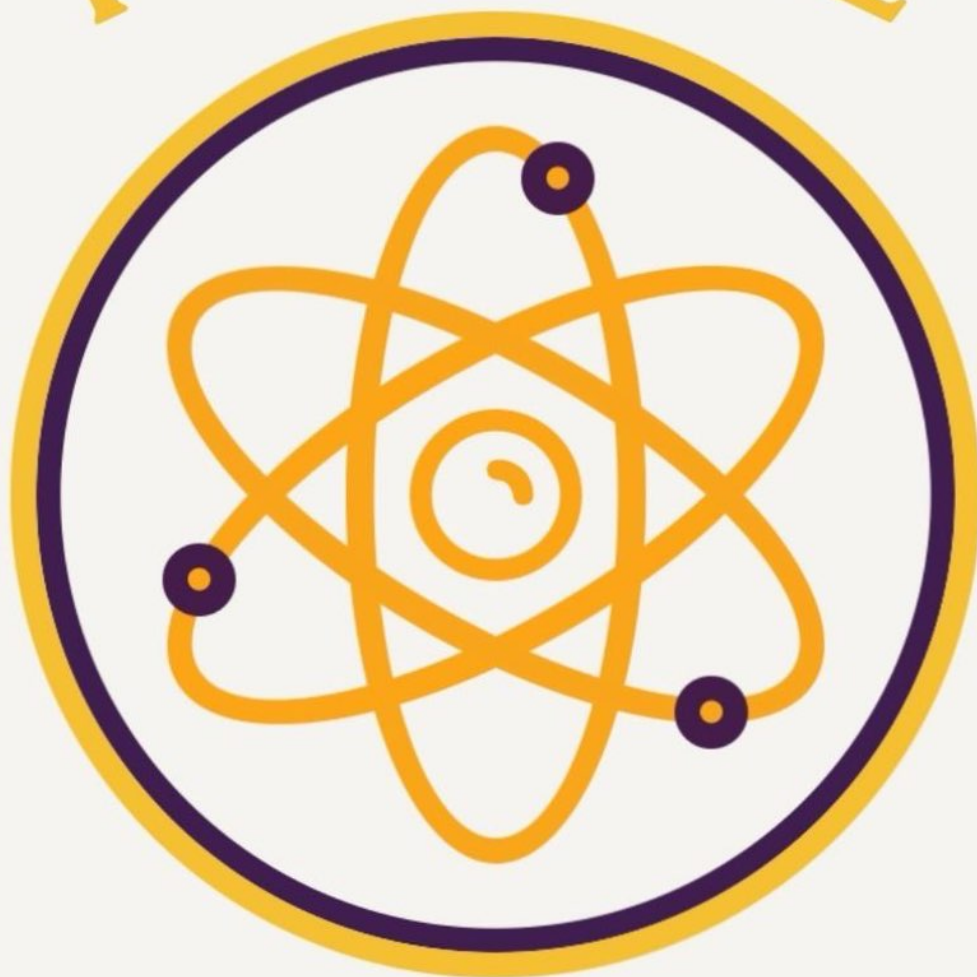


ALGORITMI I STRUKTURE PODATAKA 2



Pripremila: Lena Joković

① B-DELETE-KEY(root, m, node, key)

$i = 1$

while (node.keys[i] < key) do $i = i + 1$

end-while

temp = node.children[i+n]

while (temp.children[0] != null) do temp = temp.children[0]

end-while

SWAP(node, i, temp, 0)

SHIFT(temp, 0), temp.num = temp.num - 1

parent = temp.parent, $i = 1$

while (parent.children[i] != temp) do $i = i + 1$

end-while

if ($i = \text{parent.num}$) then

left = parent.children[i-1], right = temp, $i = i - 1$

else

left = temp, right = parent.children[i+n]

end-if

size = left.num + 1, left.keys[size] = parent.keys[i]

SHIFT(parent, i), parent.num = parent.num - 1

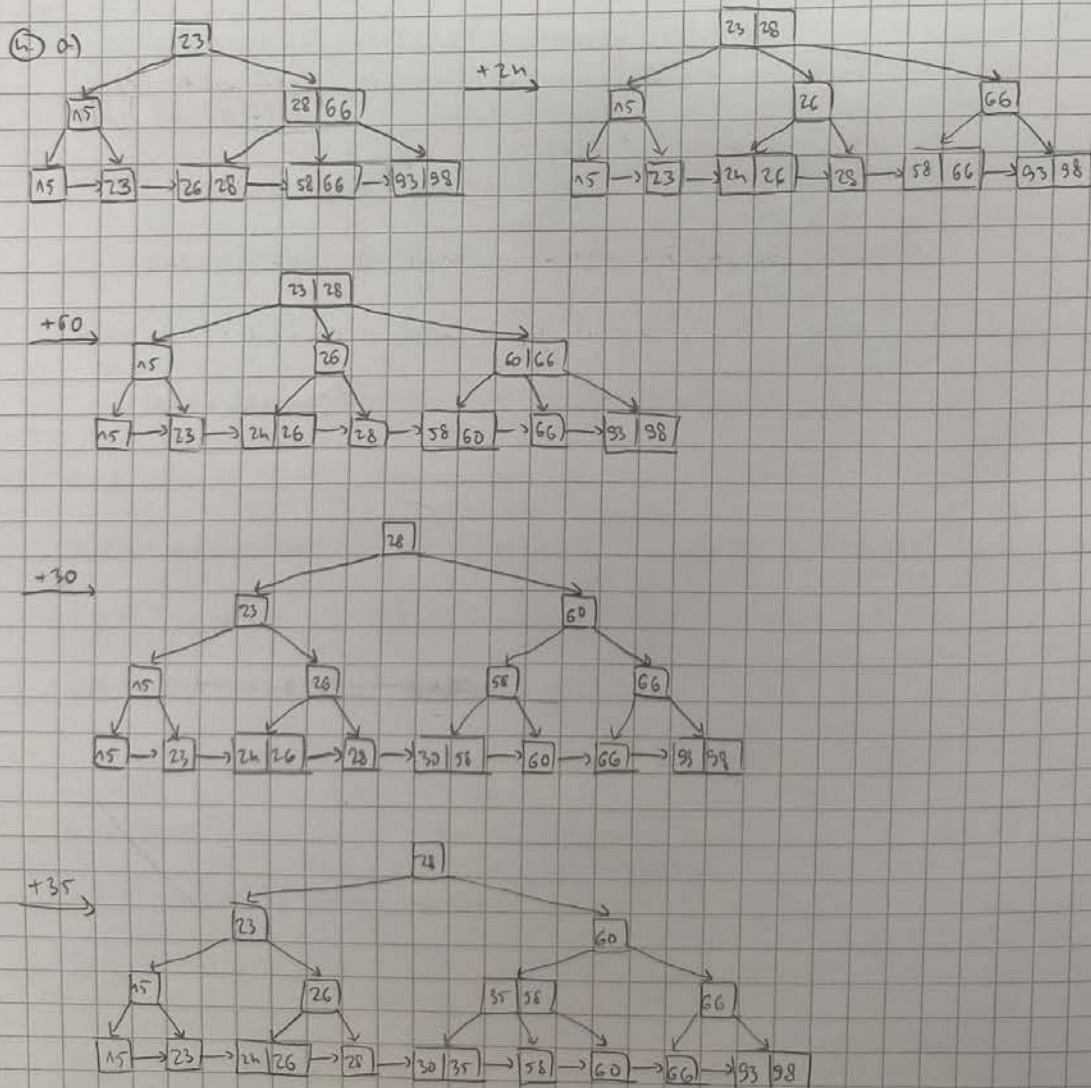
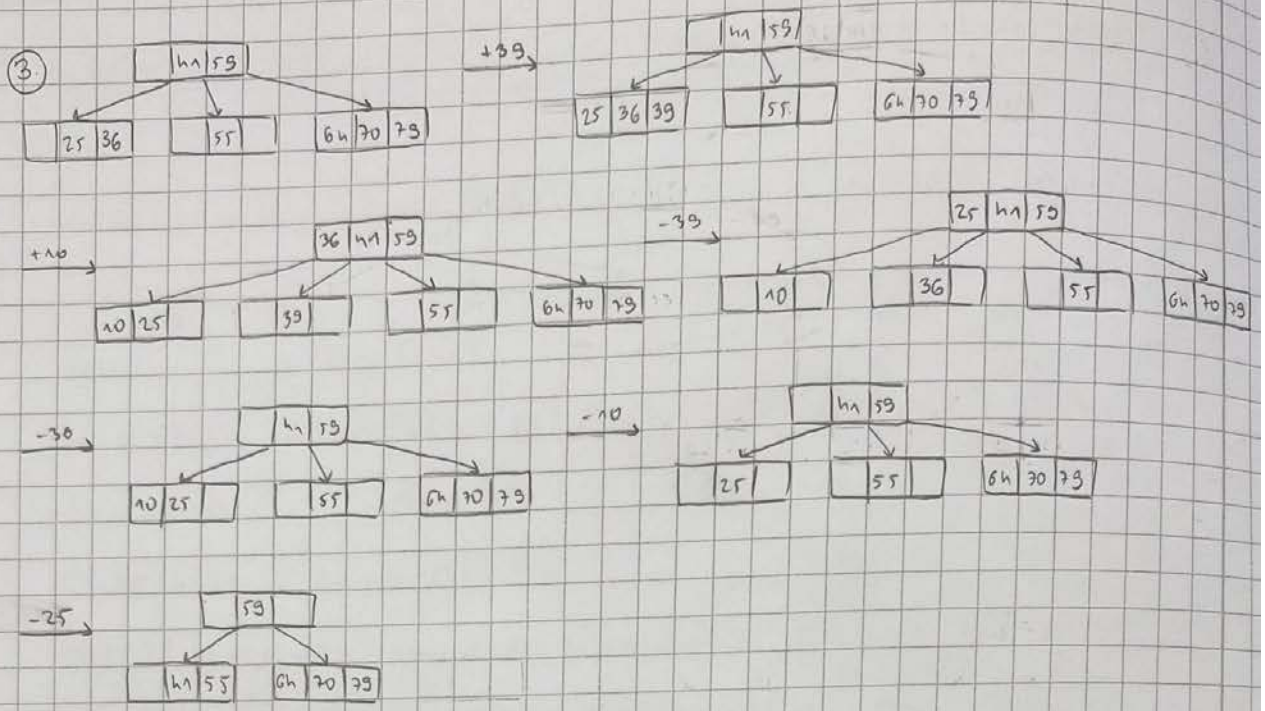
for j in range n to right.num do

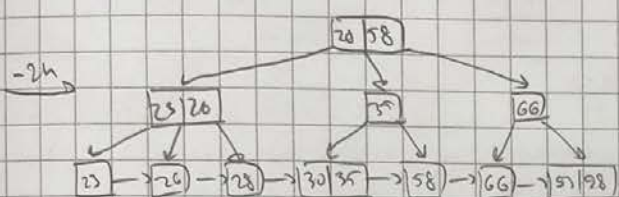
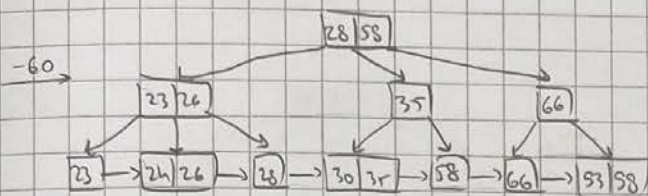
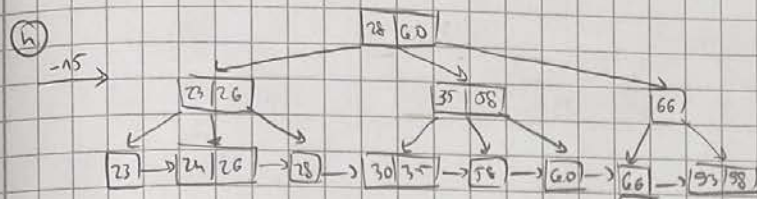
size = size + 1, left.keys[size] = right.keys[j]

end-for

... (memo za pogleda)

ACM2 K2-23





δ) - просечан број приступа принципом усредне претраге: 3

- попуњеност табеле: $\frac{15}{22} \approx 0.68$

ε) - хеш функција се добија сумирањем кодова појединачних карактера стринга, по модулу величине табеле(n)

- унформна хеш функција при довољно дугачким стринговима

A..Z → 65..90, дужина 10 карактера

а) n = 100

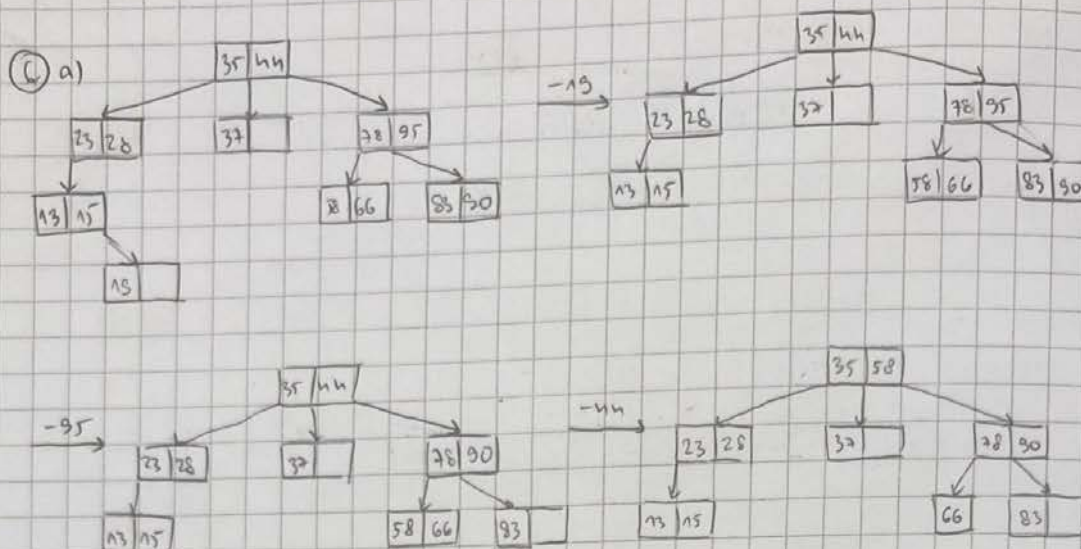
sum ≈ 650..900, $h(k) = (\text{sum} \cdot 100)$

- применљива хеш функција која даје релативно унформно распоређене кодове

б) n = 1000

sum ≈ 650..900, $h(k) = (\text{sum} \cdot 1000)$

- не применљива хеш функција, јер ће давати само кодове у распону од 650 до 900, па ће величина табеле бити неспоразумна

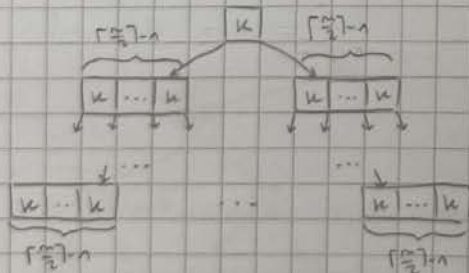


- брисање 19: брисање из листа
- брисање 95: мењање са претпоследњом и брисање из листа
- брисање hh: мењање са следовицом и брисање из листа

б) максимална вероватноћа пренома у B стаблу реда m

- стабло од n чворова - $(n-2)$ пренома
- има најмање $1 + (n-1)(\frac{m}{2}-1)$ кључева
- максимална вероватноћа пренома по кључу:

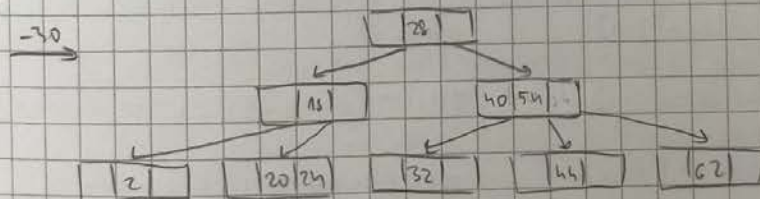
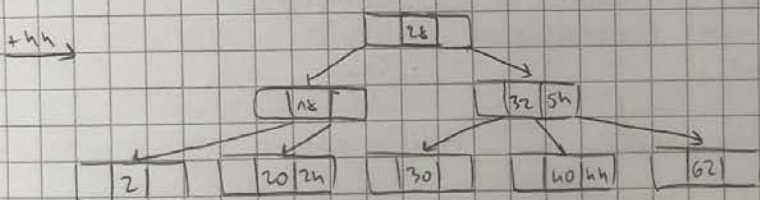
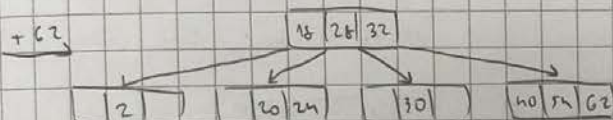
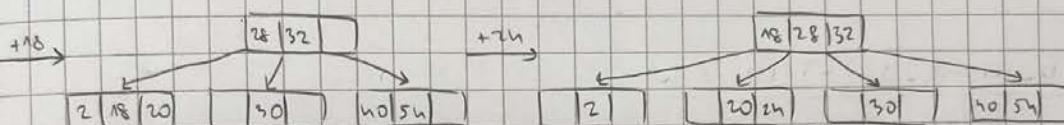
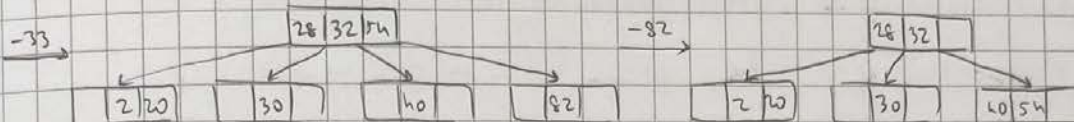
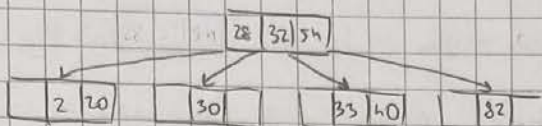
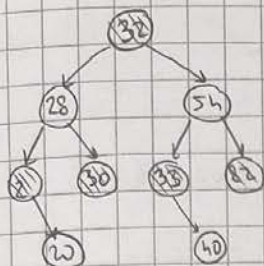
$$\frac{n-2}{1 + (n-1)(\frac{m}{2}-1)}, \quad n \gg \Rightarrow \frac{1}{\frac{m}{2}-1}$$



K2-22

ACM2

1.



- 2) а) В* сѣабно рега m ($m \geq 3$), вине од два нивоа
 два листови минимално попуњени
 два унутрашњи нивоа вине од минимално попуњени
 из листа се брине нису

- 1) сјајате у з: нвор, десни брат и нелн брат
 2) сјајате у з: нвор, десни брат и други десни брат
 3) сјајате у з: нвор, нелн брат и други нелн брат

б) B-STAR-DELETE(node, k)

```

i = INDEX(node.keys, k)
SHIFT(node, i)
node.num = node.num - 1
arr = COPY(node.keys, node.num)
parent = node.parent
i = INDEX(parent.children, node)
if (i > 1 and i ≤ parent.num) then
    node1 = parent.children[i-1]
    node2 = parent.children[i+n]
else if (i ≤ parent.num-1) then
    node1 = parent.children[i+n]
    node2 = parent.children[i+2]
else if (i > 2) then
    node1 = parent.children[i-n]
    node2 = parent.children[i-2]
end-if
size = node.num

for j in range 1 to node1.num do
    INSERT(arr, node1.keys[j])
    INSERT(arr, node2.keys[j])
    size = size + 2
end-for

if (i = parent.num + 1) then i = i - 2
else if (i > 1) then i = i - 1
end-if

SHIFT(parent, i), mid = size / 2
parent.num = parent.num - 1
parent.keys[i] = arr[mid]
for j in range 1 to mid - 1
    node1.keys[j] = arr[j]
    node2.keys[j] = arr[mid + j]
end-for
node1.num = node2.num = mid - 1
parent.children[i] = node1
parent.children[i+n] = node2

```

③ a) HAS_KEY(root, key)

temp = root

for i in range 1 to len(key) do

code = ch(key[i])

if (temp[code] != null) then temp = temp[code]

else return false

end-if

end-for

if (temp[info] != null) then return true

else return false

end-if

δ) CAN_BE_DIVIDED(root, sequence)

if (HAS_KEY(root, sequence)) then

return true

else

for i in range 2 to len(sequence) do

if (CAN_BE_DIVIDED(root, sequence[:i]) and

CAN_BE_DIVIDED(root, sequence[i:])) then

return true

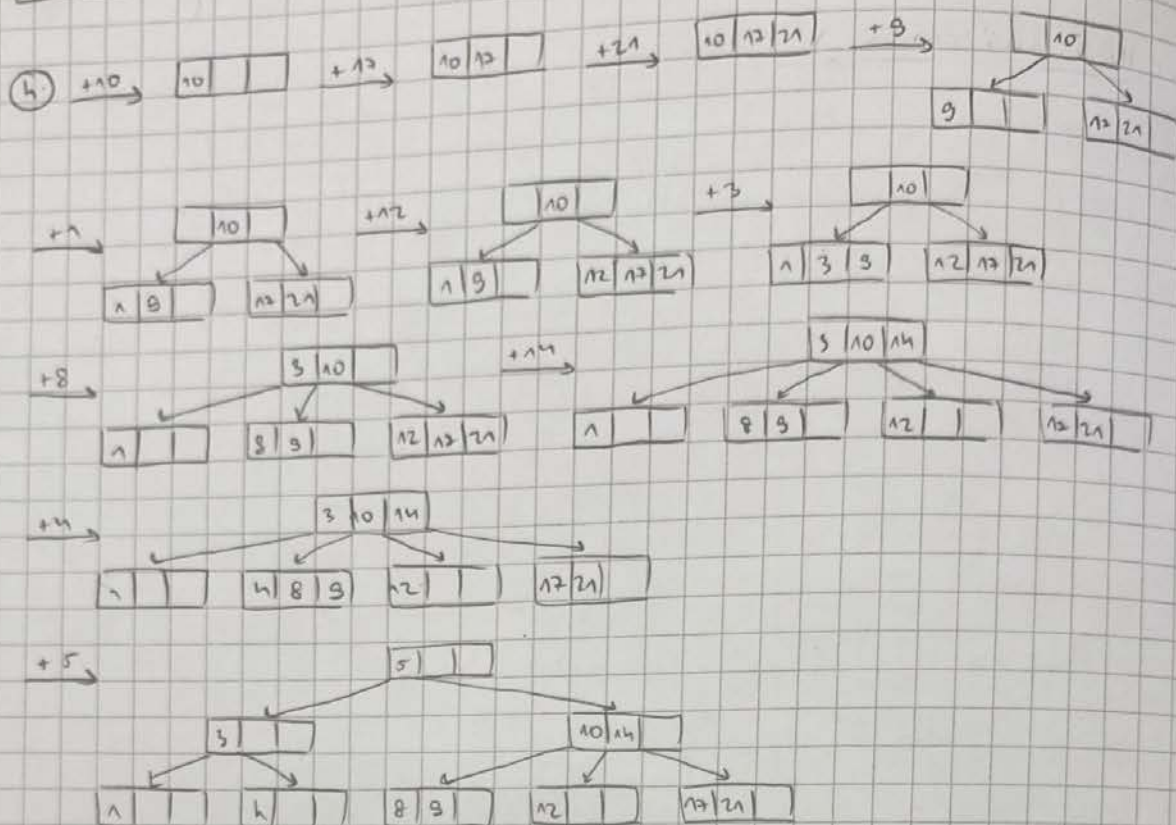
end-if

end-for

return false

end-if

ACN2 K2-22



- коэффициент сбалансированности: $\frac{11}{24} \approx 0.46$

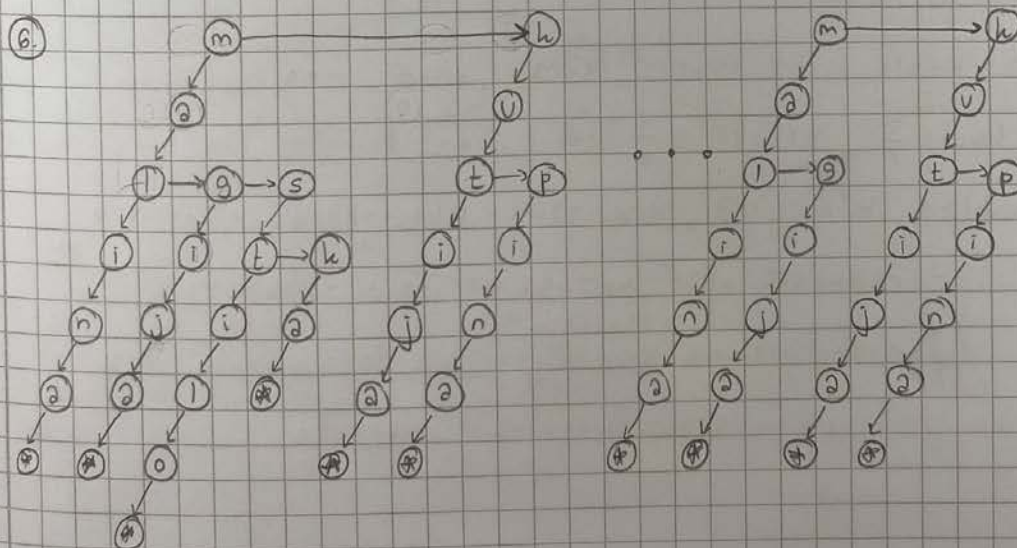
- проемная доля приращивания приращивом усредненные проемные доли:

$$(1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 7 \cdot 3) / 11 = 2.55$$

- проемная доля приращивания приращивом неусредненные проемные доли: 3

5 a)

⑤) INSERT_DATA (root, n, key, nfo)



7. Број кључева n , висине h

$$n \leq (m-1) \cdot (1 + m + m^2 + \dots + m^{h-1}) = (m-1) \frac{m^h - 1}{m - 1} = m^h - 1$$

$$m^h \geq n+1 \Rightarrow \underline{m \geq (n+1)^{\frac{1}{h+1}}}$$

- вредност m треба да буде довољно мала да не било података на диску стигне $m-1$ кључева, $m-1$ показивача на записе и m показивача на појединачне блокове

8. а) ненумерички кључеви $\rightarrow$ нумерички кључеви

- сваки карактер који се јавља у кључу се може кодирати, на пример својим ASCII кодом, и онда постројати збир кодова свих карактера кључа по модулу величине табеле

$$h("axx") = (1+26+24) \cdot n = 51 \cdot n$$

$a \rightarrow 1, z \rightarrow 26, x \rightarrow 24$ (редни број слова у абеди)

б) 8 улаза, кључеви 3, 4, 5, 20, 21

дискретна униформна функција расподеле

$$F_z(k_1) = \frac{1}{m}, F_z(k_2) = \frac{2}{m}, \dots, F_z(k_m) = 1$$

$$H(k) = \lceil n \cdot F_z(k) \rceil - 1$$

$$k_1=3, k_2=4, k_3=5, k_4=20, k_5=21, m=5, n=8$$

$$F_z(k_i) = \frac{i}{5}, H(k_i) = \lceil 8 \cdot \frac{i}{5} \rceil - 1, i=1, \dots, 5$$

$$H(k_1=3)=1, H(k_2=4)=3, H(k_3=5)=4, H(k_4=20)=6, H(k_5=21)=7$$

0	
1	3
2	
3	4
4	5
5	
6	20
7	21

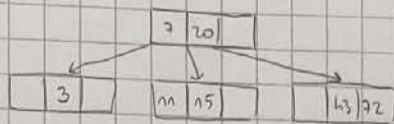
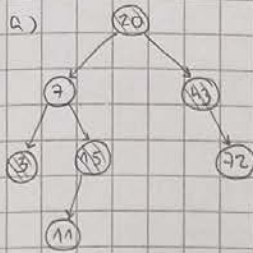
- вредност овог метода је једноставно

израчунавање неке функције без подизања, без обзира на саме вредности кључева

K2-21

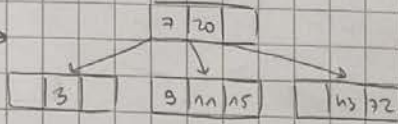
ACN2

1. a)

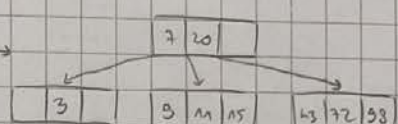


8)

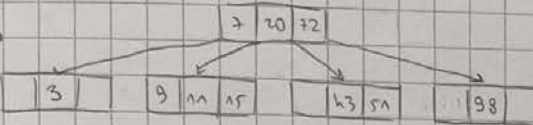
+9



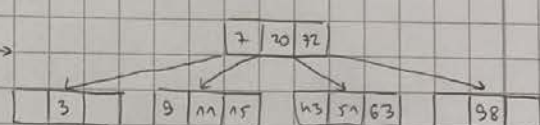
+98



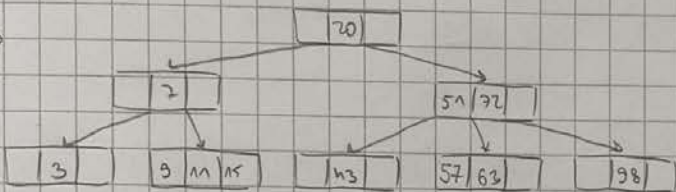
+51



+63

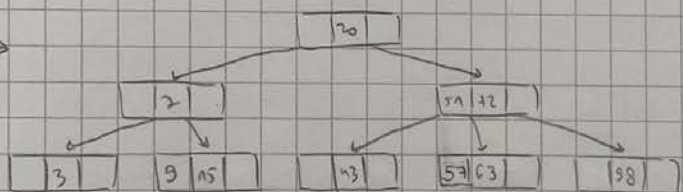


+57

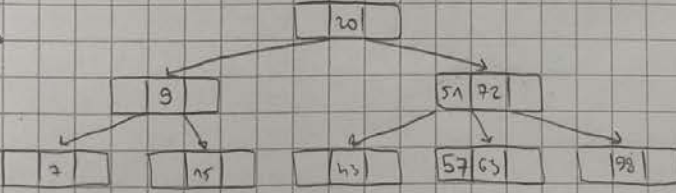


b)

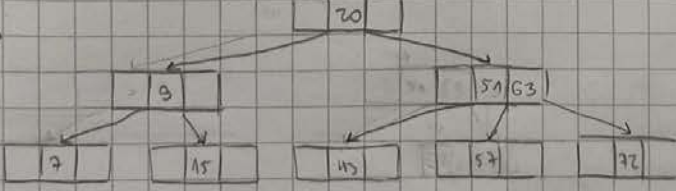
-11



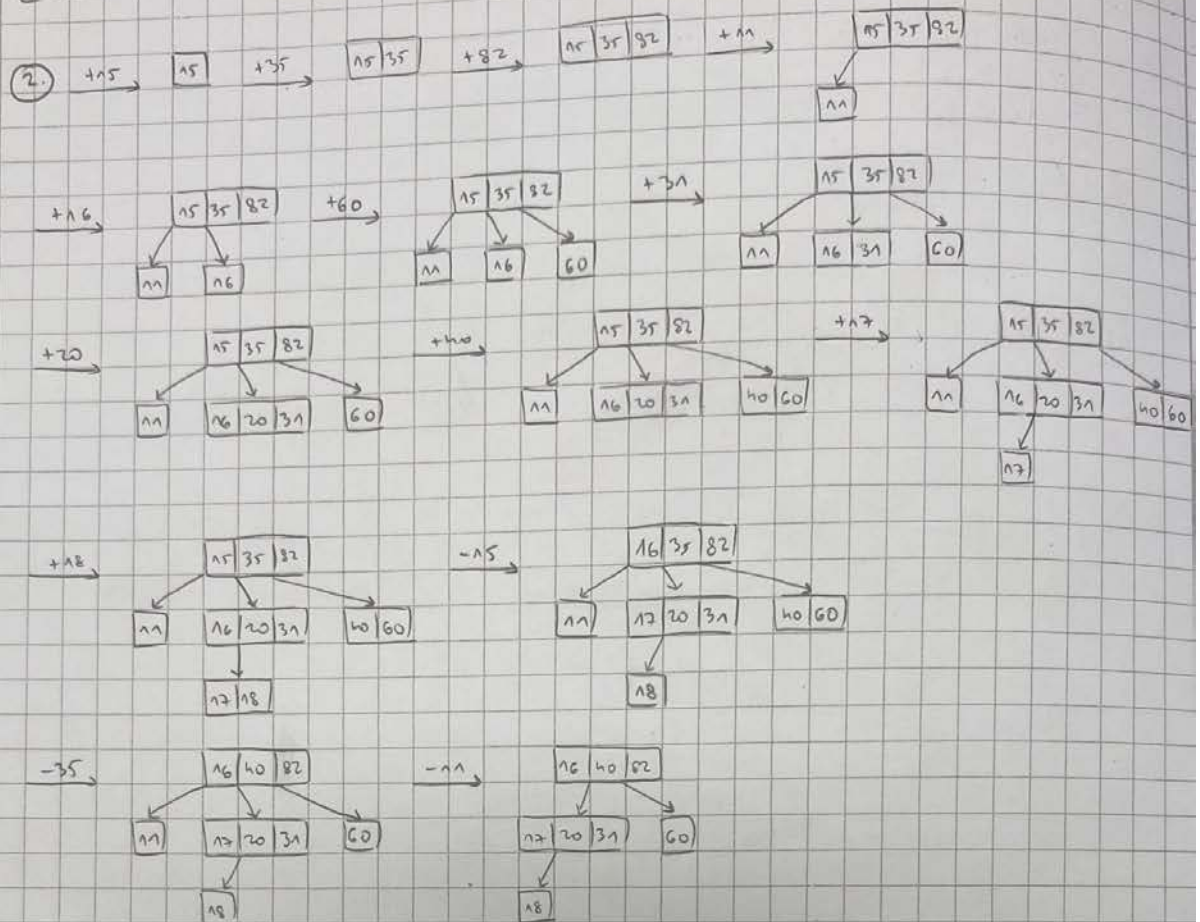
-3



-98



ACn2 k2-21



③ FIND_PREFIX(root, w)

max-len = 0, len = 1, STACK_INIT(S), next = root

loop while (next != null) do

while (next != null) do

push(S, (next, len))

next = next.left, len = len + 1

end-while

if (not STACK_EMPTY(S)) then

next, len = POP(S)

if (next.info = EOF) then next.num = 1

else next.num = ADD_NUM(next)

end-if

if (next.num >= k and len > max-len) then max-len = len

end-if next = next.right

③ FIND-PREFIX(root, w)

```

    else return max-len end-if
end-loop

```

ADD_NUM(node)

```

temp = node.left, num = 0
while (temp ≠ null) do num = num + temp.num
end-while
return num

```

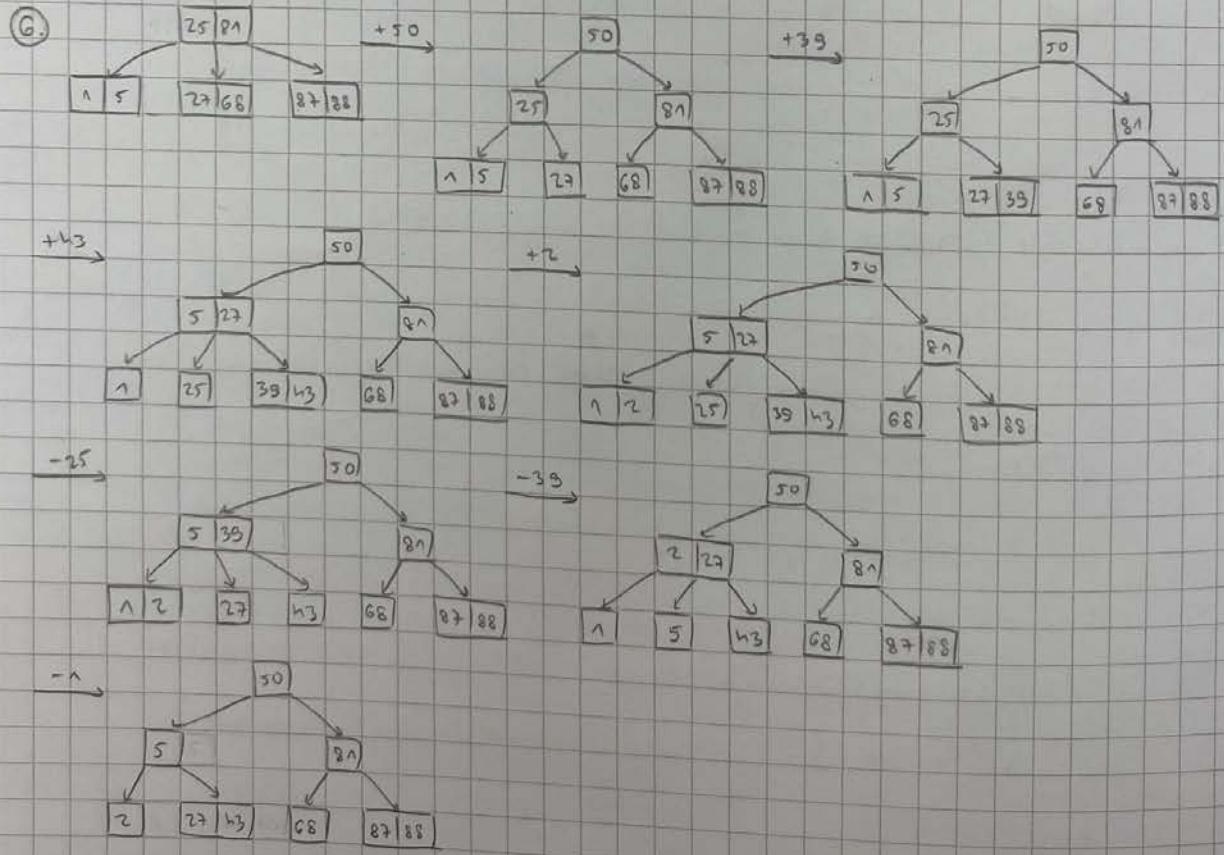
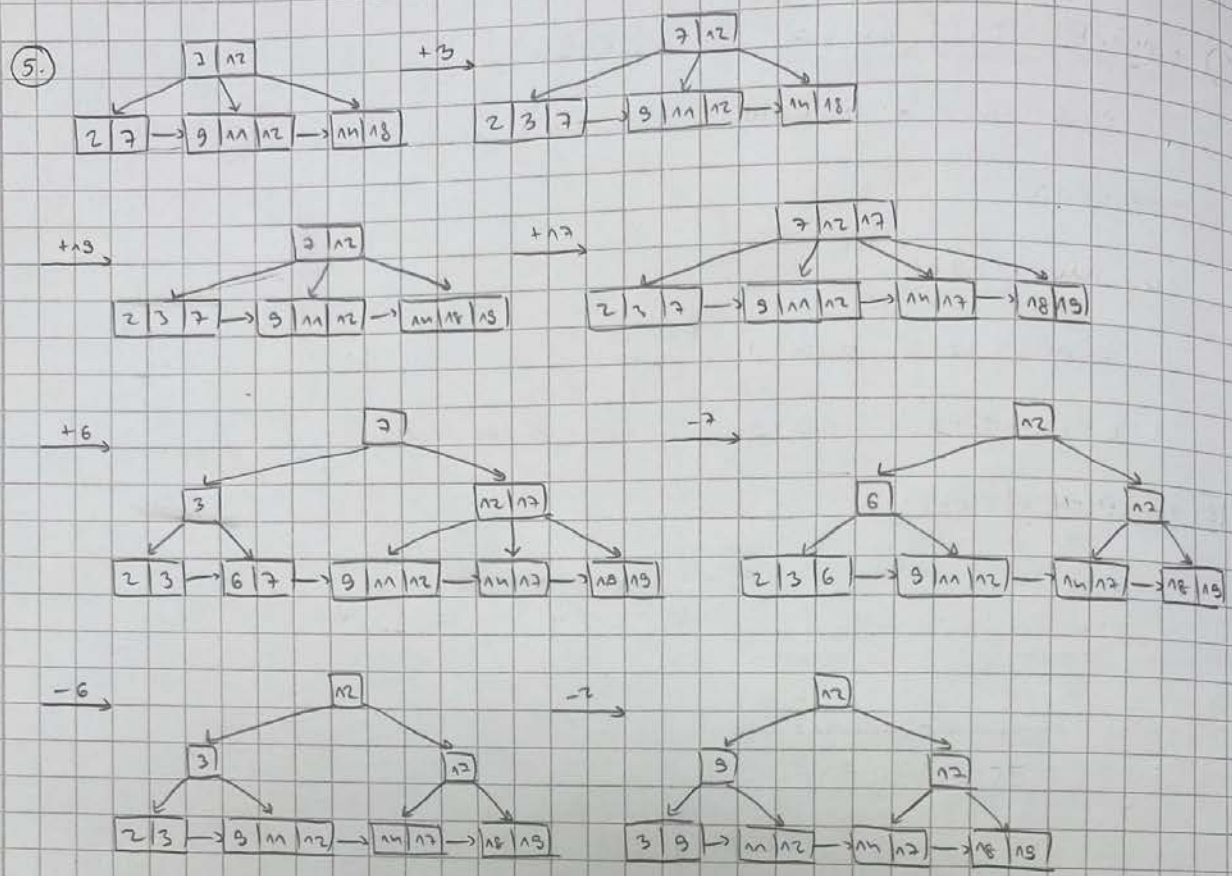
④ B-RANGE(root, m, a, b)

```

keys = NEW-ARRAY
if (root ≠ null) then
    i = 1
    while (i ≤ root.num and root.keys[i] < a) do i = i + 1
    end-while
    while (i ≤ root.num and root.keys[i] ≤ b) do
        if (root.keys[i] > a) then
            keys = keys + B-RANGE(root.children[i], m, a, b)
        end-if
        keys = keys + root.keys[i]
    end-while
    if (root.keys[i - n] < b) then
        keys = keys + B-RANGE(root.children[i], m, a, b)
    end-if
end-if
return keys

```

ACM2 (K2-21)



7) кључевн од 0 до 99, хем маде на са 9 улаза

21, 12, 32, 66, 58 - значајно вероватнији

$h(k)$ = прва цифра $(k+1)$

- слани од кључева 21, 12, 32, 66, 58 се подира на различито место, па не долази до међусобне колизја

1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	21	32		58	66			

- могу се сместити и кључевн 45, 73, 80, 97

8) BPLUS-DELETE-KEY(root, m, key)

temp = root

while (not IS-LEAF(temp)) do

 i = 1

 while (i < temp.num and temp.keys[i] < key) do i = i + 1

 end-while

 temp = temp.children[i]

end-while

j = 1

while (j < temp.num and temp.keys[j] < key) do j = j + 1

end-while

if (j = temp.num) then

 temp.parent.keys[i] = temp.keys[j-1]

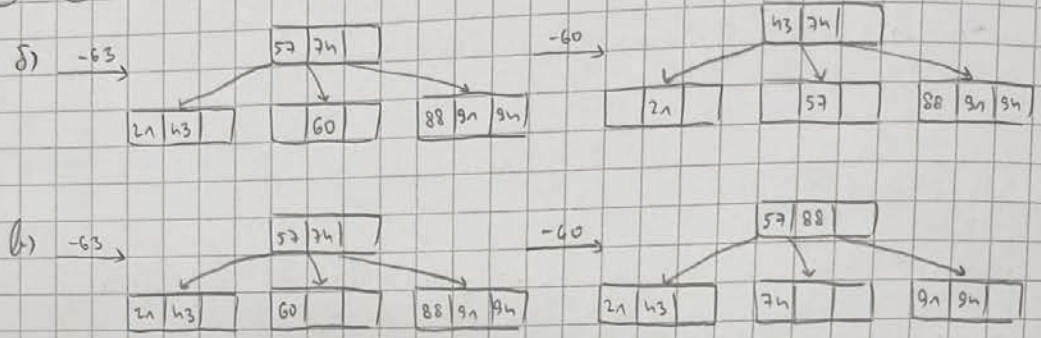
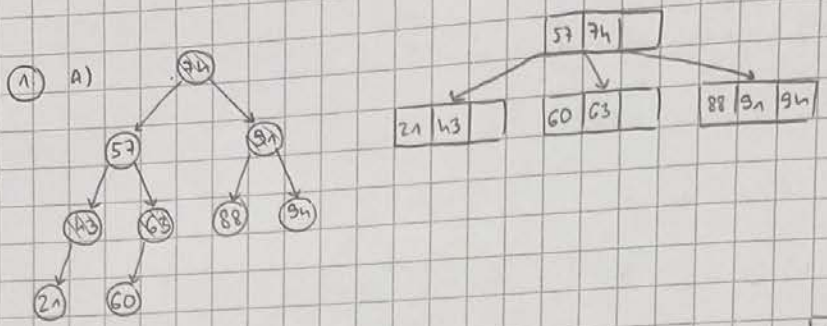
else

 for k in range j to temp.num-1

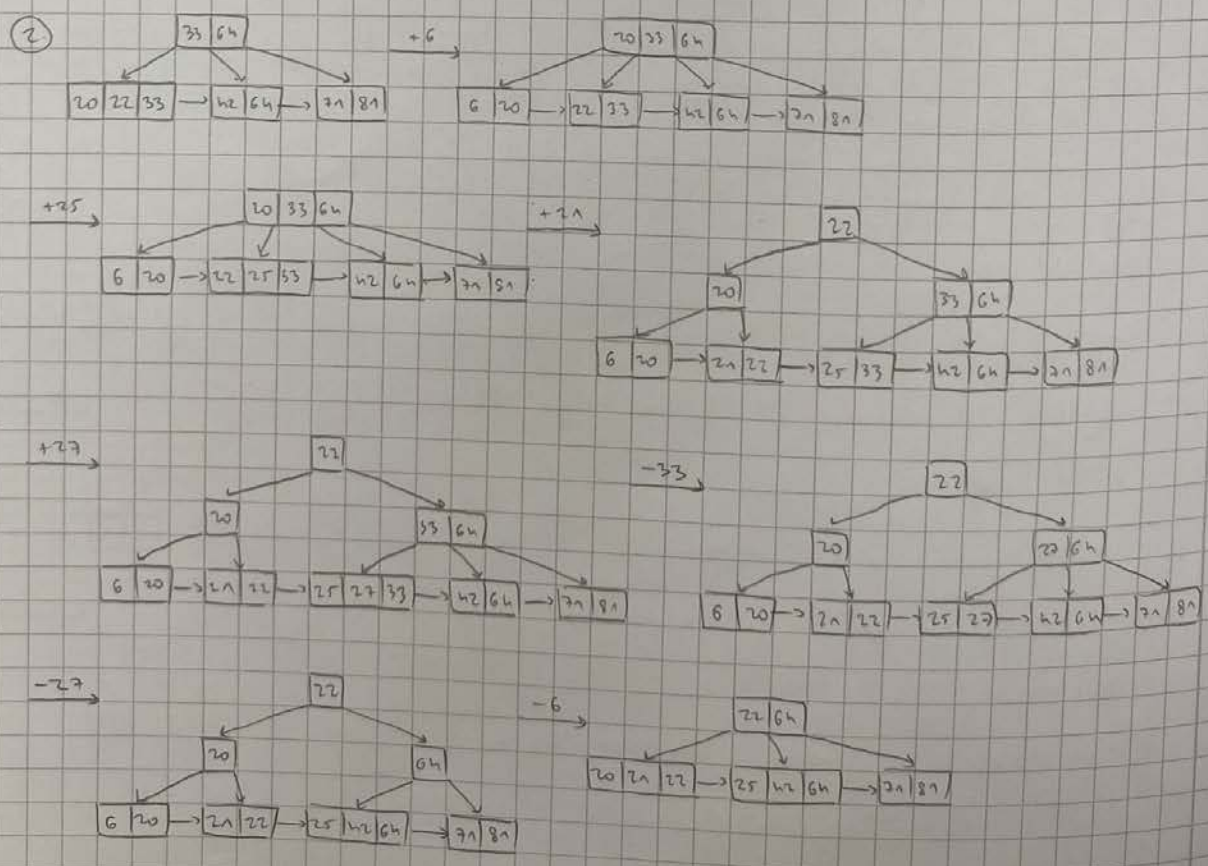
 temp.keys[k] = temp.keys[k+1]

 end-for

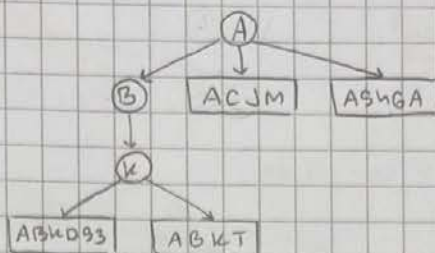
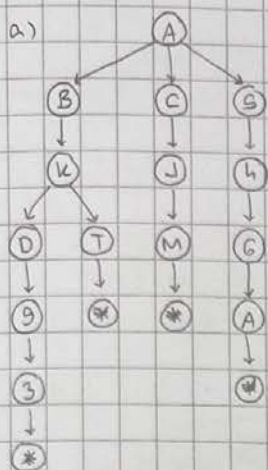
end-if temp.num = temp.num - 1



- Ђино Ђи разликe y початком измeгу синабна, јер Ђи се Ђен члоролн попунабелн са десно на лево и бринуа Ђи се позајмуа оз десног брата (дока мо y 2-3-ч синабну нје "синабн брата")



3. a)



- dve jedinstvene putanje od nekog čvora do lista se mogu smestiti u jedan poseban čvor, koji sadrži ceo niza ključ i pokazivan na dalje, ta se nova struktura razlikuje od strukture čvora koji se traže.

8) TRIE-COMPACTION(root)

④ DELETE(root, m, key)

temp = root

while (not IS-LEAF(temp)) do

i = 1

while (i ≤ temp.num and temp.keys[i] < key) do i = i + 1

end-while

if (i ≤ temp.num and temp.keys[i] = key) then break

else temp = temp.children[i]

end-if

end-while

DELETE_FROM_NODE(temp, i)

DELETE_FROM_NODE(node, i)

if (IS-LEAF(node)) then SHIFT(node, i), node.num = node.num - 1

else SHIFT(node, i)

node.num = node.num - 1

if (node.num = 0) then DELETE(node) end-if

else

temp = SUCC(node, i), j = 0

if (temp = node) then temp = PRED(node, i), j = temp.num

end-if

node.keys[i] = temp.keys[j]

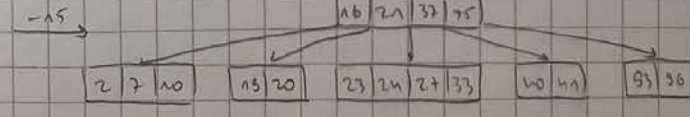
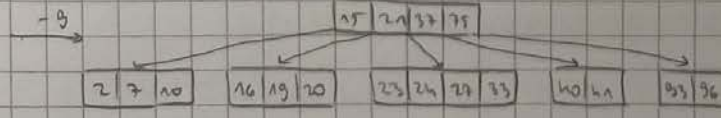
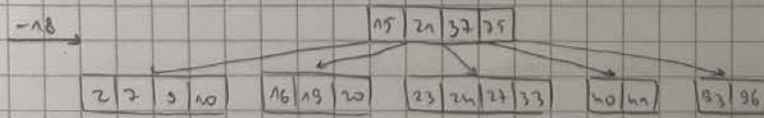
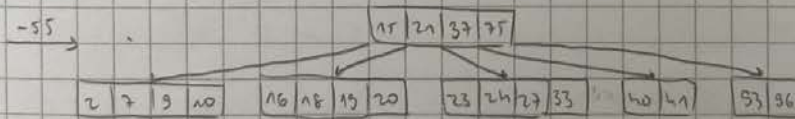
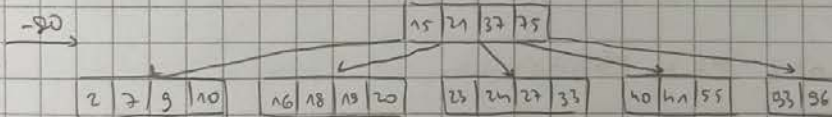
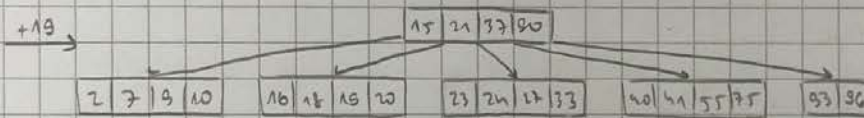
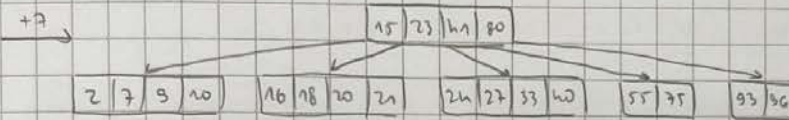
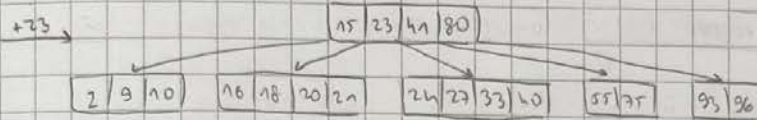
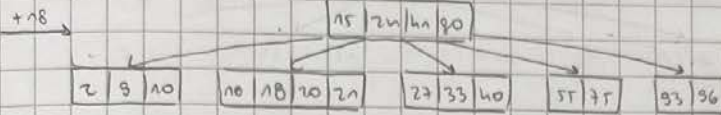
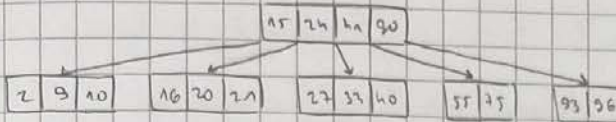
DELETE_FROM_NODE(temp, j)

end-if

12-19

AC02

5.



c) a) - B^+ стабилно и јер су нивои енергије тогине у једнакосту студентима, док је у истом B^+ стабилно уз једну тогину у једнакосту непази у једнакосту студентима и јер су те тогине у једнакосту француским

- оваква структура efikasno podrazlaga pretragu po godine i subvencijalnu pretragu ostalih godina do kraja trenutnog perioda, a u dovođenju trenutnih situacija

8) FIND-STUDENTS-IN-RANGE (structure, year1, year2)

```
temp = structure.root
```

```
while (not IS-LEAF(temp)) do
```

 $i=0$

```
while (i < temp.num and temp.keys[i] < year-1) do i = i+1
```

end-while

```
temp = temp.children[i]
```

end-while

i = 1, students = NEW-ARRAY

```
while (temp.keys[i] < year) do i=i+n
```

end-while

```
year = temp.keys[i]
```

```
while (year ≤ year2) do
```

```
students = students + temp.info[i]
```

if ($i < \text{temp_num}$) then

$i = i + n$, year = temp.keys[i]

else

temp = temp.next, i = 0, year = temp.keys[i]

end-if

end-while return students

(2) В стандардно реда m

256 бита запис, 32 бита избор

64 бита адресе, 2KB величина блоку на диску

- у избору само избор:

$$\text{величина избора: } \underbrace{(m-1) \cdot 32}_{\text{избор}} + \underbrace{(m-1) \cdot 64}_{\text{запис}} + \underbrace{m \cdot 64}_{\text{показувањ}} = 160m - 96 \text{ бита}$$

$$2000 \cdot 8 \geq 160m - 96$$

$$m \leq \frac{16000 + 96}{160} \Rightarrow \underline{m \leq 100}$$

- у избору читав податак:

$$\text{величина избора: } \underbrace{(m-1)(32+256)}_{\text{податак}} + \underbrace{m \cdot 64}_{\text{показувањ}} = 352m - 288 \text{ бита}$$

$$2000 \cdot 8 \geq 352m - 288$$

$$m \leq \frac{16000 + 288}{352} \Rightarrow \underline{m \leq 46}$$

- ако се у избору смета читав податак, ред стандард је малтешки и не може да докаже до суштинских операција преламана и стајења. 11

(8) а) - метод земања: $h(k) = k \cdot n$, n - величина табеле

- једноставност хеш-функције

- за n треба изабрати парне бројеве и степене бројева 2 и 10

б) $n=3$, изборени 19, 10, 4, 37, 49, 52

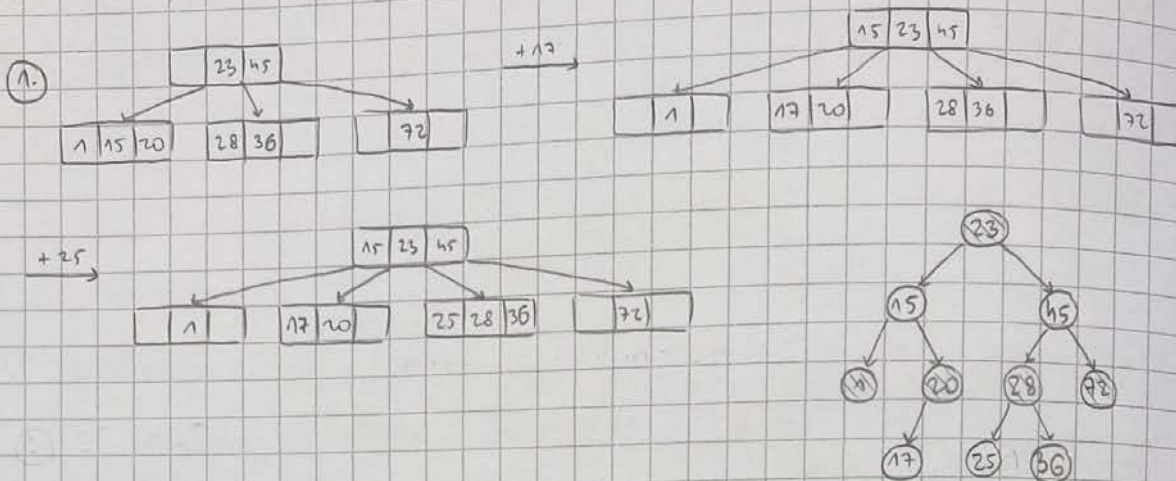
$$h(19)=1, h(10)=1, h(4)=4, h(37)=1, h(49)=4, h(52)=8$$

- велика вероватноћа колизија: {19, 10, 37} и {4, 49}

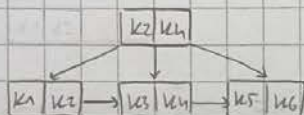
$$n=8$$

$$h(19)=3, h(10)=2, h(4)=4, h(37)=5, h(49)=1, h(52)=4$$

- мала вероватноћа колизија: {4, 52}

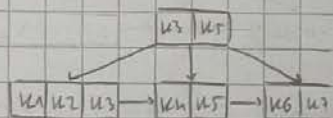


2. a) B+ стаблo, $m=3$, $h=1$



- просечан број приступа приликом успешне претраге: 2
- просечан број приступа приликом неуспешне претраге: 2

б) B+ стаблo, $m=4$, $n=7$



- просечан број приступа приликом успешне претраге: 2
- просечан број приступа приликом неуспешне претраге: 2

8. а) - Минимална савршена хеш функција је хеш функција при којој са n кључева у табели са n улаза не долази до колизија

б) кључеви 54, 91, 57, 23, 28 $\Rightarrow n=5$

$$H(k) = (k \cdot 10) / 2$$

0	1	2	3	4
91	23	54	57	28

③. CALC (root)

max = 0, pow = 0, temp = root

loop

i = 9

while (i ≥ 0 and temp[i] = null) do i = i - 1

end-while

if (i = -1) then break

end-if

max = i · 10^{pow} + max, pow = pow + 1

temp = temp[i]

end-loop

min = 0, pow = 0, temp = root

loop

if (temp[10] != null) then break

end-if

i = 0

while (i ≤ 9 and temp[i] = null) do i = i + 1

end-while

if (i = 10) then break

end-if

min = i · 10^{pow} + min, pow = pow + 1

temp = temp[i]

end-loop

return max - min

(4) B-DELETE_NO-BORROW(root, m, node, key)

i = 1

while (node.keys[i] < key) do i = i + 1

end-while

for j in range i to node.num - 1 do

node.keys[j] = node.keys[j + 1]

end-for

node.num = node.num - 1

parent = node.parent, i = 1

while (parent.children[i] != node) do i = i + 1

end-while

if (i = parent.num + 1) then

left = parent.children[i - 1], right = node, i = i - 1

else

left = node, right = parent.children[i + 1]

end-if

size = left.num + 1, left.keys[size] = parent.keys[i]

for j in range 1 to right.num do

size = size + 1, left.keys[size] = right[j]

end-for

left.num = size, DELETE(right)

for j in range i to parent.num - 1 do

parent.keys[j] = parent.keys[j + 1]

parent.children[j + 1] = parent.children[j + 2]

end-for

parent.num = parent.num - 1

⑥ COUNT_KEYS(root, format)

temp = root, num = 0 null)

for i in range 1 to len(format) do

char = format[i]

if (char = ".") then

while (temp != null) do

num = num + COUNT_KEYS(temp.left, format[(i+1):])

temp = temp.right

end-while return num

else if (char = "*") then continue

else

if (format[(i+1)] = "*") then

while (temp != null) do

num = num + COUNT_KEYS(temp, format[(i+1):])

temp = FIND_CHAR(temp, char)

end-while return num

else temp = FIND_CHAR(temp, char)

end-if

end-if

if (temp = null) then return num end-if

end-for

if (temp = EOF) then num = num + 1 end-if return num

FIND_CHAR(temp, char)

while (temp and temp.info < char) do temp = temp.right end-while

if (temp and temp.info = char) then return temp.left

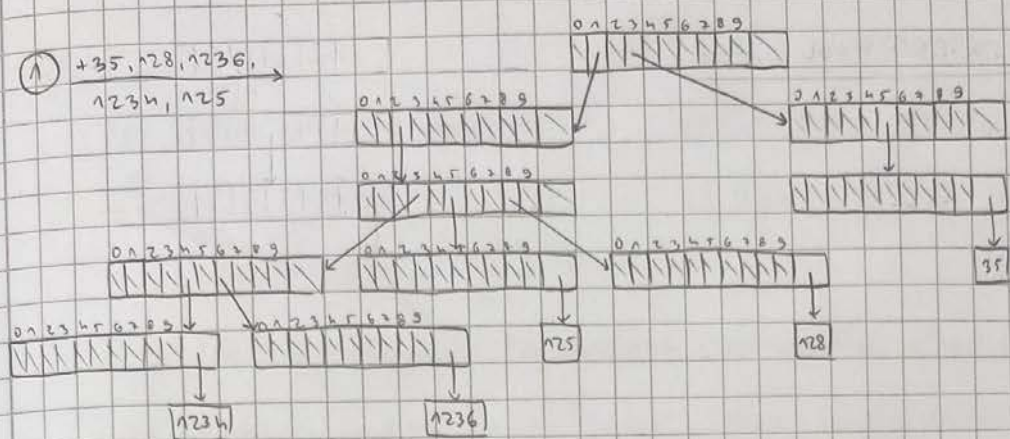
else return null

end-if

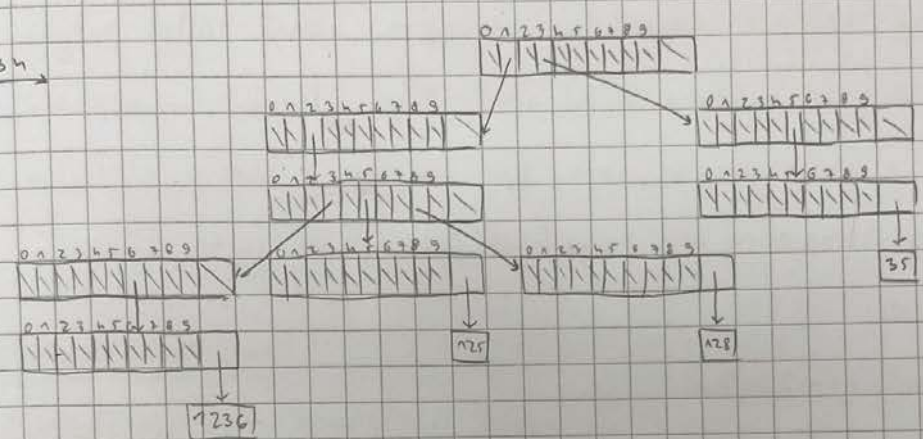
К 2-17

AC02

① $+35, 128, 1236,$
 $1234, 125$



-1234



② В соответствии с

дано: инструкция погашения

③ B-PLUS-INSERT (root, m, key)

temp = root

while (not IS-LEAF(temp)) do

i = 1

while (i ≤ temp.num and temp.keys[i] < key) do i = i + 1

end-while

temp = temp.children[i]

end-while

j = 1

while (j ≤ temp.num and temp.keys[j] < key) do j = j + 1

end-while

if (j ≤ temp.num) then

for k in range temp.num + 1 down to j + 1 do

temp.keys[k] = temp.keys[k - 1]

end-for

else UPDATE-PARENT(temp, key) // temp.parent.keys[i] = key

end-if

temp.keys[j] = key, temp.num = temp.num + 1

if (temp.num > m - 1) then

node = NEW-NODE(m), mid = temp.num / 2

for k in range 1 to temp.num - mid do

node.keys[k] = temp.keys[mid + k], node.num = node.num + 1

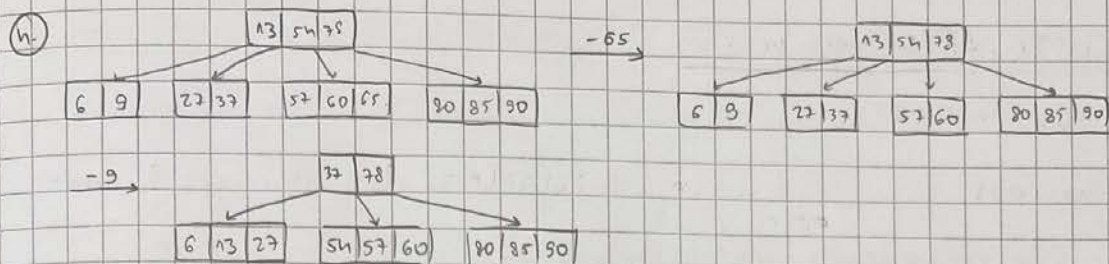
end-for

temp.num = mid, node.parent = temp.parent

SHIFT(temp.parent, i)

temp.parent.keys[i] = temp.keys[mid]

temp.parent.children[i + 1] = node



- При брисању чворчева 57/60/65, а затим 6/9, чвор не може да по зајми чворче ни од десног, ни левог, групог десног ни групог левог брата, па долази до спајања чворова 3-у-2
- Преостали чворчеви у 3 чвора и 2 раздвојена чворча се поређају у низ, средњим чвором додате чвор, а преостали чворчеви се распоређују у 2 чвора

5. TRANSFORM(root)

QUEUE-INIT(Q), INSERT(Q, (root, null))

while (not QUEUE-EMPTY(Q)) do

node, parent = DELETE(Q)

if (node.color = black) then

new = NEW-NODE, new.keys[z] = node.key

if (parent != null) then CONNECT(parent, new)

else new-root = new

end-if

else ADD(parent, node.key), new = parent

end-if

if (node.left) then INSERT(Q, (node.left, new)) end-if

if (node.right) then INSERT(Q, (node.right, new)) end-if

end-while

return new-root

② DELETE-KEYS (root, prefix)

STACK-INIT(S)

temp = root

for i in range 1 to len(prefix) do

char = prefix[i]

while (temp ≠ null and temp.info < char) do temp = temp.right

end-while

if (temp = null or temp.info > char) then return

end-if

PUSH(S, temp), temp = temp.left

end-for

DELETE-FROM-ROOT(temp)

temp = POP(S), parent = POP(S)

while (not STACK-EMPTY(S) and parent.left = temp and temp.right = null) do

DELETE(temp)

temp = parent, parent = POP(S)

end-while

start = parent.left

if (start = temp) then

parent.left = temp.right, DELETE(temp)

else

while (start.right ≠ temp) do start = start.right

end-while

start.right = temp.right, DELETE(temp)

end-if

7) m-арно стабџно, број нумера n

a) - максимална висина: минимално попуњено

$$h_{\max} = \left\lceil \frac{n}{m-1} \right\rceil - 1$$

- минимална висина: максимално попуњено

$$n \leq (m-1) (1 + m + m^2 + \dots + m^h) = (m-1) \frac{m^{h+1} - 1}{m-1} = m^{h+1} - 1$$

$$h_{\min} = \lceil \log_m(n+1) \rceil - 1$$

б) - максималан број нумера: максимално попуњено

$$b_{\max} = m \left\lfloor \frac{n}{m-1} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n - m \left\lfloor \frac{n}{m-1} \right\rfloor}{m-1} \right\rceil + \dots$$

- минималан број нумера: минимално попуњено

$$b_{\min} = \left\lceil \frac{n}{m-1} \right\rceil$$

8) 100 улаза, метод конверзије основе

a) H(key)

t = 0, pow = 0

while (key > 0) do

t = t + (key % 10) * 2^{pow}

key = key / 10, pow = pow + 1

end-while

return t / 100

б) EQ-CLASS-NUM(k, n)

num = 0, arr = NEW-ARRAY(100)

for i in range 1 to n do

code = H(k[i])

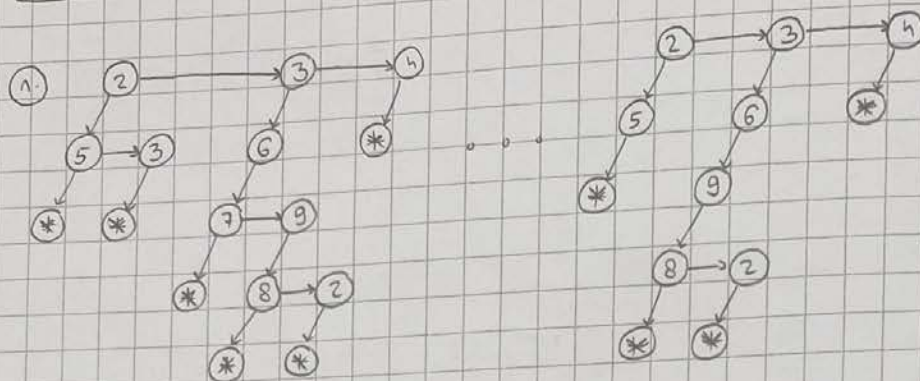
if (arr[code] = 0) then

arr[code] = 1, num = num + 1

end-if

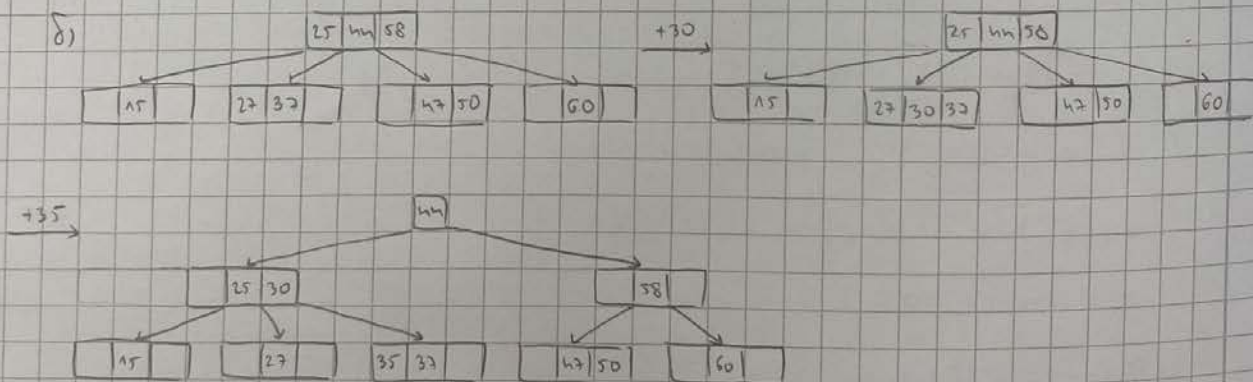
end-for

return num



2. a) - уметање у јун нвор 2-3-и стабле се врши тако што се
 јуни нвор ставе у родитеља, нвор се премања и остала
 два црвена нвора постају јуни у новим нворовима, а
 нови нвор дође на одговарајућу позицију као црвени у
 једном од нових нвора.

- постоје разлике у односу на класично B стабло због
 позиције нвора и тога да се у родитеља стави нвор
 пређајући јуни нвор, а не средњег у новоформираном нвору.



③ B-DEL-BORROW(node, m)

parent = node.parent

i = 1

while (parent.children[i] ≠ node) do i = i + 1

end-while

if (i ≤ parent.num) then right = parent.children[i + 1] end-if

if (i > 1) then left = parent.children[i - 1] end-if

if (right and right.num > $\lceil \frac{m}{2} \rceil - 1$) then

node.num = node.num + 1

node.keys[node.num] = parent.keys[i]

parent.keys[i] = right.keys[1]

SHIFT-L(right), right.num = right.num - 1

else if (left and left.num > $\lceil \frac{m}{2} \rceil - 1$) then

node.num = node.num + 1, SHIFT-R(node)

node.keys[i] = parent.keys[i - 1]

parent.keys[i - 1] = left.keys[left.num]

left.num = left.num - 1

else print ("Nemoguce pozajmicã")

end-if